

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

VERIFICACIÓN EMPÍRICA DE LA LEY DE ZIPF A PARTIR DEL MÉTODO DE REGRESION CUANTÍLICA PARA LAS CIUDADES BRASILEÑAS

Jorge Alberto Orellana Aragón¹
Vivian dos Santos Queiroz Orellana²

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo avaliar a validade empírica da Lei de Zipf para o caso das cidades brasileiras. A hipótese que sustenta essa lei afirma que o tamanho dos centros urbanos avança em relação ao tamanho da maior cidade. As metodologias utilizadas foram a aplicação de regressão quartil e regressão quartil simultânea. O período analisado para o Brasil inclui os censos entre os anos 1950-2001 e os resultados não mostram robustez suficiente para validar a validade da Lei Zipf, pois somente após os censos de 1991 e 2000 nos quartis de 25%, 50% e 75% seriam confirmados.

Palavras-Chave: Economia Urbana e Regional; Lei de *Gibrat*, Tamanho e Espacial de Distribuição Regional da Atividade Econômica

Resumen:

Este trabajo tiene por objetivo evaluar la validez empírica de la ley de Zipf para el caso de las ciudades brasileñas. La hipótesis que sustenta dicha ley, afirma que el tamaño de los centros urbanos avanza en relación al tamaño de la mayor ciudad. Las metodologías utilizadas fueron la aplicación de regresión cuantílica y regresión cuantílica simultánea. El periodo analizado para Brasil comprende los censos entre los años 1950-2001 y los resultados no muestran con suficiente robustez para validar la vigencia de la Ley de Zipf, ya que apenas a partir de los censos de 1991 y 2000 en los cuantiles de 25%, 50% y 75% se confirma.

Palabras-Clave: Economía Urbana y Regional, Ley de Zipf, Tamaño y Espacial de Distribución Regional de la Actividad Económica

¹ Professor do Instituto de Ciências Econômicas, Administrativas e Contábeis (ICEAC), Universidade Federal de Rio Grande (FURG)

² Professora do Instituto de Ciências Econômicas, Administrativas e Contábeis (ICEAC), Universidade Federal de Rio Grande (FURG)

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

Abstract:

The main purpose of this paper is to evaluate the empirical validity of Zipf's Law for the case of Brazilian cities. The hypothesis that supports this law sustains that the size of urban centers should more advance in relation to the size of the largest city. The methodologies used were the application of quantile regression and also simultaneously quantile regression. The period analyzed for Brazil includes the censuses between the years 1950-2001, however, the results do not show sufficient robustness to validate the validity of Zipf's Law, since after the 1991 and 2000 censuses, merely 25%, 50 % and 75% quantiles, were only confirmed.

Keywords: Urban and Regional Economics, *Zipf's Law*. Size and Spatial Distributions of Regional Economic Activity

Código JEL: R10, R12, F15.

1. Introducción

Es importante resaltar que en el período de las últimas seis décadas en Brasil la emigración inter-estatal y regional aumentó de forma significativa, una de las razones tiene que como origen la implementación del modelo económico de substitución de importaciones que apoyaban la industrialización y correspondientes los regimenes aduaneros especiales que apoyaban dicho modelo han influenciado en muchas cuestiones tales como el desarrollo económico, sistema político, crecimiento demográfico y la evolución de las esferas social y cultural. Durante ese lapso de tiempo los sistemas de ciudades han ido cambiando en cuanto a su dimensión y en su orden dentro de un sistema urbano, es decir, de las mayores ciudades fueron cambiando para convertirse en menores en función del crecimiento del comercio intrarregional e internacional por lo que es valido y relevante un estudio un poco más por menorizado de los sistemas de ciudades en Brasil para evaluar cual es el grado de optimalidad de tales sistemas.

El objetivo de este trabajo es evaluar la validez empírica de la *ley de Zipf* para Brasil. Dicha ley indica que la tasa de crecimiento poblacional de una ciudad no es independiente de su tamaño. Para tal efecto son realizadas diferentes regresiones cuantílicas para validar de forma empírica la validez de dicha ley. Por último, se usa una metodología empírica auxiliar de análisis son las funciones de densidades no paramétricas de Kernel que soy muy útiles para tener una visión más completa de la evolución de los sistemas urbanos en el Brasil.

2. Revisión de Literatura

Un abordaje metodológico adecuado de analizar la concentración urbana y la distribución poblacional entre los núcleos de la red urbana de sistemas de ciudades en los países es a través del estudio y análisis de la verificación empírica llamada Ley de *Zipf* o regla del *rank*³, que posibilita acompañar la evolución de las dimensiones de los sistemas de centros urbanos. La hipótesis que sustenta la ley, afirma que el tamaño de los centros urbanos avanza en relación al tamaño de la mayor ciudad (PÉREZ, 2006).

³ La palabra *Rank* se refiere al ordenamiento del tamaño de las ciudades (de mayor a menor).

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

De tal suerte, que si la Ley de *Zipf* se cumple, existe la tendencia para una distribución urbana más equilibrada, evitando el fenómeno pernicioso y adverso de la macrocefalia urbana.⁴ A partir de este simple análisis, es posible descubrir evidencias importantes que permitan realizar inferencias acerca de la concentración poblacional en los diferentes instantes del tiempo.

Como apuntan Segado, García y Rosique (1996), los sistemas de ciudades y sus modelos explicativos de jerarquía pueden dividirse en dos grandes grupos: el primero serían los modelos de jerarquía de los sistemas de ciudades; y el otro son los modelos de análisis de especialización funcional del sistema. Para el presente trabajo, lo relevante serán los modelos de jerarquía de los sistemas de ciudades, que pueden subdividirse en dos categorías: modelos verticales, que tienen por objetivo analizar las jerarquías de las ciudades considerando únicamente las variables que se definen a partir del tamaño poblacional urbano, sin incluir otras consideraciones espaciales de otro tipo, por ejemplo, el modelo de Pareto⁵ o regla del tamaño/puesto; y segundo serán los modelos horizontales, que incluyen la variable espacial, ya que consideran la distribución de los núcleos en función de los niveles de población, es decir, considerar la horizontalidad entre los núcleos en función de sus niveles.

Considerando apenas los modelos verticales *Zipf* (1949)⁶ retomó la idea central del trabajo propuesto por Auerbach (1913), que indicaba que las distribuciones de los tamaños de las ciudades son mucho más variadas de lo que se piensa, y por su vez consigue alcanzar una concordancia con la idea original de Pareto que de forma similar tiene un exponente λ igual a -1. Por la sorprendente regularidad que muestra esa ley, la misma fue conocida como la Ley de *Zipf* o Ley de Potencia, como la conceptualizan Fujita, Krugman y Venables (2002) al definirla como “el misterio de la jerarquía urbana”.

La Ley⁷ de *Zipf* puede ser definida como el producto del tamaño de la población de cualquier ciudad multiplicado por su posición en la ordenación de una definida región/territorio geográfico por lo que su producto será igual a la población de la mayor ciudad. Por lo tanto, la segunda mayor ciudad tendrá la mitad de la población más grande y la tercera tendrá un tercio y así sucesivamente.

Como explican Lanasta, Perdiguero y Sanz (2000), las distribuciones del tamaño de las ciudades presentan peculiaridades propias cuando se trata de distribuciones fuertemente asimétricas. En efecto, cuando existen muchas ciudades pequeñas y pocas grandes de dentro de un sistema urbano, lo que sucede es que el número de ciudades grandes en cada clase decrece conforme aumenta la dimensión que caracteriza dicha clase. La configuración espacial del equilibrio y/o estado estacionario que define el número y el tamaño de los núcleos urbanos puede entenderse como el resultado de un proceso donde participan dos tipos de fuerzas opuestas, es decir, fuerzas centrípetas o también llamadas de aglomeración y fuerzas centrifugas o de dispersión.

⁴ Dentro de la literatura de la geopolítica se refiere a la tendencia que ocurre en la praxis en muchos países, tal como la concentración del poder político, económico, cultural y la administración pública en la ciudad capital. La macrocefalia es un fenómeno que aparece en países o regiones donde la red urbana se encuentre muy desequilibrada por el predominio de una ciudad que concentra gran parte de la población urbana.

⁵ El índice de Pareto puede ser definida como la medida de desigualdad de la distribución de la renta y/o ingreso.

⁶ Esa regularidad empírica fue formalizada por George *Zipf* (1949) y por su sorprendente verificación terminó siendo llamada “Ley de *Zipf*” y que los centros urbanos la interpretaron como de distribución de los rendimientos de los individuos, conocida como la Ley de Pareto.

⁷ La distribución de las ciudades puede aproximarse por $P_n \sim 1/n^\lambda$ donde P_n representa la frecuencia de una ciudad ordenada n-ésima y el exponente λ será próximo a -1. Lo anterior significa que el segundo elemento se aproximará con una frecuencia del 1/2 de la del primero y, el tercer elemento 1/3 y así sucesivamente.

ENABER XIX

3. Localización e concentración das actividades económicas

El equilibrio espacial correspondiente es el resultado de una complicada interacción de fuerzas que reciben y que expulsan consumidores y empresas, hasta que puedan buscar una localización mejor u óptima.

Considerando todo lo anterior, el abordaje metodológico utilizado para estimar la Ley de Zipf para este trabajo será a partir de una regresión cuantílica como lo aplica Amarante (2011) el cual permite relajar algunas de las restricciones impuestas por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MQO). En primer lugar se parte de una función objetivo que deberá ser minimizada:

$$Min_{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_{\tau} |y_j - \lambda'_{\tau}|, \quad (1)$$

donde:

$$\pi_{\tau}(\varepsilon_{rj}) = \begin{cases} \tau \varepsilon_{ij}, & \text{para } \varepsilon_{ij} > 0 \text{ y} \\ 1 - \tau \varepsilon_{ij}, & \text{para } \varepsilon_{ij} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Min_{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_{\tau} |\ln(j) - \ln(L_j) - \ln(L_j)|, \quad (3)$$

$$\pi_{\tau}(\varepsilon_{rj}) = \begin{cases} 0,25, & \text{para } \varepsilon_{ij} > 0 \text{ y} \\ 0,75, & \text{para } \varepsilon_{ij} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

El objetivo de la regresión cuantílica consiste en minimizar la sumatoria de las desviaciones standard ponderadas de acuerdo a los siguientes cuantiles en los pesos τ para las desviaciones ε_{ij} positivas en los cuantiles: 2%, 5%, 25%, 50%, 75%, 95 y 98%.

La Ley de *Zipf* que se deriva de un fenómeno observado empíricamente en el mundo real, pues el tamaño de la distribución poblacional de una región y/o país así como puede también ser el tamaño de empresas de un país tiene la tendencia a ser similar en muchos países (Soo, 1994). La ley de *Zipf* sugiere que muchas ciudades dentro de un país tenderán a ser pequeñas y las ciudades mayores tenderán progresivamente a ser pocas.

Por otra parte, la llamada distribución de Pareto establece una relación matemática entre las poblaciones de las ciudades de un territorio, por lo tanto, al conocer la población de la ciudad mayor de tamaño, es decir, la ciudad líder, se puede dislumbrar el número posible de ciudades de una determinada población. Esa relación puede presentarse en un gráfico con una función logarítmica, donde el eje de las ordenadas representa el logaritmo del número de ciudades de una determinada población y el eje de las abscisas el logaritmo de la población.

La llamada regla *rank-size rule* o regla de potencia de las ciudades fue ideada empíricamente por George *Zipf* y afirma que si se coloca en orden descendente en distintas ciudades usando un criterio de su tamaño poblacional al tamaño de una ciudad determinada (L) es decir, el $1/L$ del tamaño de la ciudad mayor. Con esa regla se muestra la existencia de una relación constante entre la población de una ciudad y su *rank* dentro de una distribución ordenada de los núcleos de acuerdo al tamaño poblacional.

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

La hipótesis para que pueda ser verificada la llamada ley de *Zipf* parte del supuesto que la población de una ciudad alcance el estado de equilibrio, es decir, el denominado *steady state* ($L_1 = K_1, \dots, L_j = K_j, \dots, L_n = K_n$) para explicar la dinámica del crecimiento en ese punto que explica el cumplimiento de la ley de *Zipf*.

Por otra parte, un abordaje alternativo a la Ley de *Zipf* es la llamada “*rank size rule*” la cual explica que la población de la segunda mayor en cuanto tamaño tiene la mitad de la población de la mayor ciudad de un sistema de ciudades de un país o región geográfica. Ya de manera formal eso puede ser expresado de la siguiente forma:

$$R(L_j) = L_1 \cdot L_j^\lambda \quad (5)$$

Donde, $R(L_j)$ se constitui como el ranking de la población de la ciudad j y L_j será el tamaño poblacional de la ciudad j . Por su parte, L_1 será el tamaño de la población de la mayor ciudad de determinada área geográfica y el exponente $\lambda < 1$ de la ley de potencia. Para el cumplimiento de la ley de *Zipf* el coeficiente tiene un valor $\lambda = -1$.

$$\ln[R(L_j)] = \ln[L_1] + \lambda \ln[L_j] \quad (6)$$

Ya considerando la versión de Ley de *Zipf* quedaría de la siguiente forma:

$$\ln[R(L_j)] = \ln[L_1] + \ln[L_j] \quad (7)$$

3. Metodologías econométricas y base de datos

Las metodologías aplicadas en el presente trabajo consisten en la implementación de métodos no paramétricos de regresión cuantílica y estimación de la función de Kernel en parte oriunda para los trabajos teóricos de Gabaix (1999) y empíricos de Soo (2001). Por otro lado, para la estimación de las densidades poblacionales urbanas se utilizan estimadores de núcleo - Kernel ponderados. De tal forma, que se usa una determinada muestra aleatoria de unidades poblacionales urbanas $\{Y_i\}_{i=1}^n$ a la cual se estima la densidad que posee el estimador, \hat{F}_h y puede obtener:

$$\hat{F}_h = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{h}\right) \quad (8)$$

Donde, h es definido como un parámetro de suavización (llamado de parámetro de largura o *bandwidth*) y $K(\cdot)$ que es la función *kernel* (núcleo) que satisface esa condición. Está formado de la densidad estimada que dependerá del valor de h y de la función de núcleo utilizada⁸. De acuerdo a Silverman (1986) no se admite que no hay consenso en la elección del parámetro de suavización, ya que ha sido ampliamente discutida en la literatura no-paramétrica y que de hecho son aplicadas diversas reglas han sido utilizadas.

⁸ De forma habitual es utilizada una función Kernel del núcleo gaussiano ya que existen pocas diferencias de eficiencia entre los diferentes *kernels* (en término de error al cuadrado medio integrado asintótico) como lo indica Ziegelmann (2002).

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

Resulta importante resaltar que la elección de ese parámetro es un punto crucial en la estimación de las densidades que en este caso son poblaciones urbanas, debido a que valores muy bajos ofrecen poca información sobre la densidad estimada y los valores muy elevados pueden acabar suavizando excesivamente la densidad. Por lo tanto, por medio de esta función de densidad permite examinar a través del análisis visual las poblaciones urbanas que muestran un grado de suavización moderado. Por último, vale la pena destacar que la base de datos aplicada fue a partir de dos censos de poblaciones efectuados por el Centro Latinoamericano y Caribeño de Demografía (CELADE) que es una subdivisión de la CEPAL y que fueron publicados en el año 2013.

4. Resultados

El propósito de esta sección es validar empíricamente la validez de la ley de Zipf, es decir, el exponente de Pareto es igual -1. En las Figuras 1 y 2 son presentadas las estimaciones cuantílicas. En el caso de la Figura 1 es dividida en 5 partes en que se muestran de forma detallada el comportamiento del coeficiente de Zipf en los cuantiles 25%, 50% y 75% y en los valores 2%, 95% y 98% como es aplicado por Amarante (2011).

Como se sabe los cuantiles son consideradas herramientas que sirven para administrar grupos muestrales previamente ordenados. En el presente caso se está estimando la mediana condicional y otros cuantiles de la variable respuesta de poblaciones urbanas. Como puede observarse en la Figura 1 en los censos de 1950 no puede ser confirmada la validez de la ley de Zipf ya que los valores son para el cuantil 50% (-0.7925) y 75% (-0.8088). En el censo de 1960 los coeficientes de Pareto alcanzan para el cuantil 50% (-0.8858) y 75% (-0.8956). Por su parte en el censo 1970 para el 50% es -0.9428 y para el 75% (-0.9467). En el censo de 1980 para el cuantil del 50% se alcanza (-0.9965). En el censo de 1991 se confirma a nivel de 50 % -1.03 y para 75% un parámetro de -1.02 y finalmente en censo del año 2000 para los cuantiles de 50% se alcanza un valor -1.05 y para el cuantil de 75% sería -1.03.

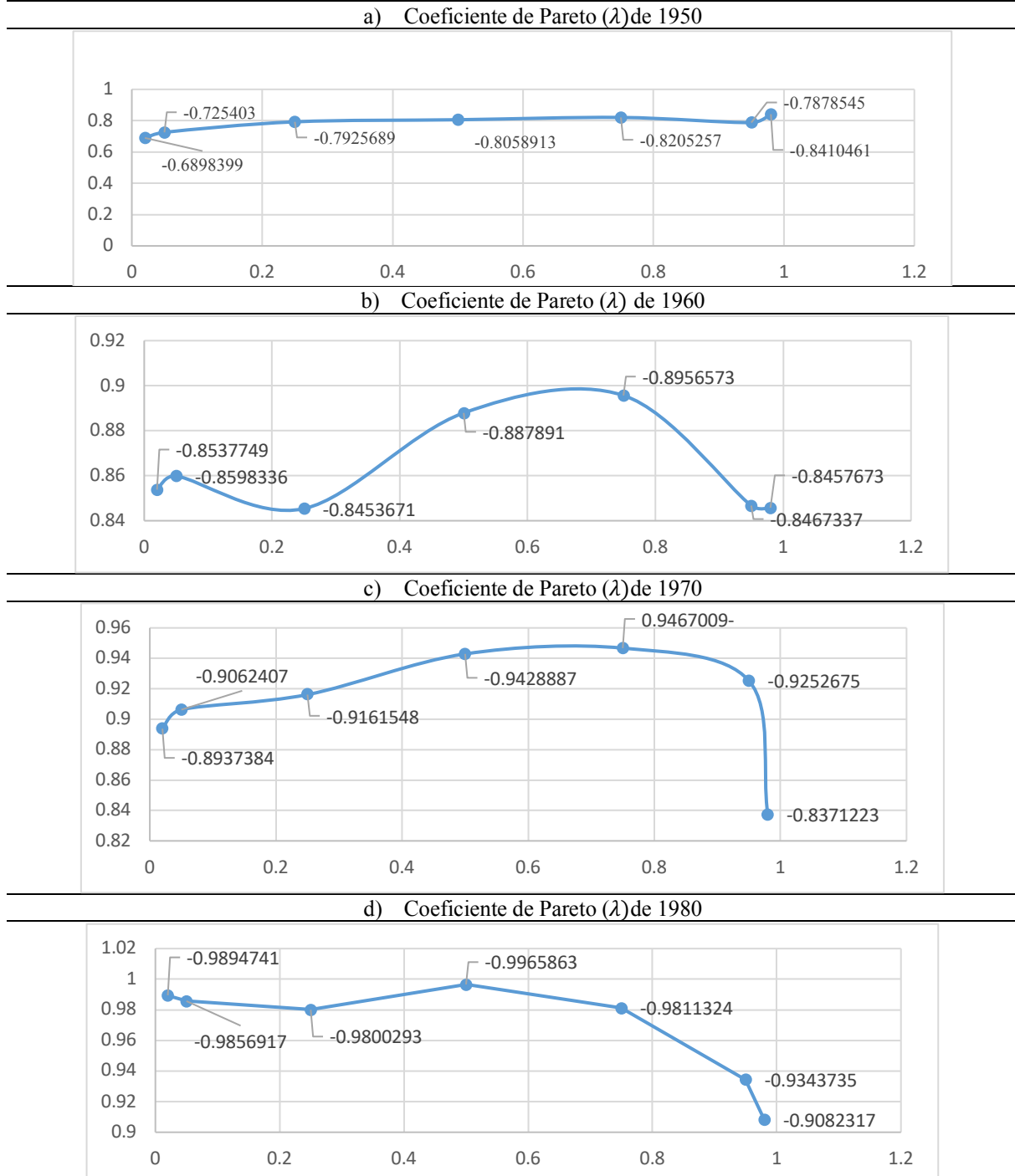
Esa evolución del coeficiente de Pareto pudo haber sido ocasionada por el cambio de modelo económico aplicado en Brasil a partir de la década de los años 90 en que se abandona el Modelo de Substitución de Exportaciones (MSI) por un modelo con énfasis en cierta apertura comercial mayor en que es desarrollado en mayor magnitud el sector agrícola en detrimento del sector industrial.

Vale la pena también mencionar que otro elemento importante para explicar la evolución del tamaño de las ciudades brasileñas que lo constituye la emigración inter-regional y la emigración realizada desde el exterior. En el caso de la primera, las grandes contingentes de emigrantes provenientes de la región nordeste han ido modificando la estructura poblacional en los grandes centros urbanos de las regiones sudeste y sur del Brasil al igual de lo que sucedió con los contingentes de emigrantes alemanes, italianos y españoles, polacos y japoneses que poblaron gran parte de las regiones sudeste y sur del Brasil.

ENABER XIX

3. Localización e concentración das actividades económicas

Figura 1.- Estimaciones del exponente de Pareto de las ciudades brasileñas por cuartil de la población urbana para los cuartiles 25%, 50%, 75% e pesos τ para las desviaciones ε_{ij} 2%, 5%, 95% y 98%.



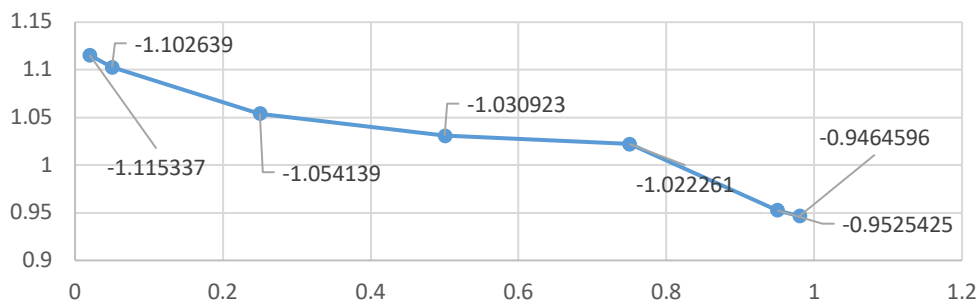
Fuente: Construcción propia a partir de los datos de CELADE (2009)

ENABER XIX

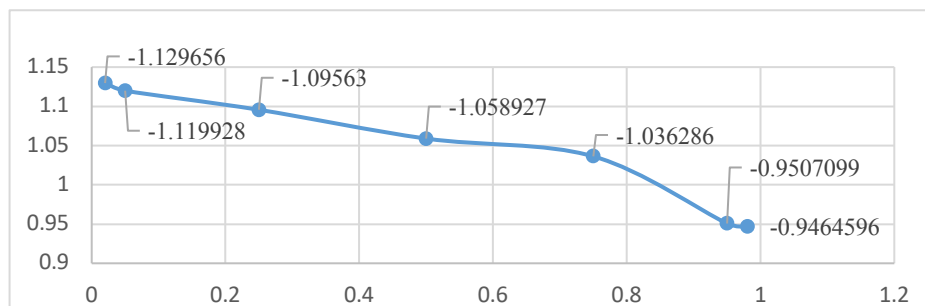
3. Localización e concentración das actividades económicas

Figura 1.- -Continuación- Estimaciones del exponente de Pareto de las ciudades brasileñas por cuartil de la población urbana para los cuartiles 25%, 50%, 75% e pesos τ para las desviaciones ε_{ij} 2%, 5%, 95% y 98%.

e) Coeficiente de Pareto (λ) de 1991



f) Coeficiente de Pareto (λ) de 2001



Fuente: Construcción propia a partir de los datos de CELADE (2009)

En la Figura 2 donde se analizan individualmente cada cuartil en relación a los diferentes censos. En el caso del cuartil de 25% se alcanza un valor el coeficiente de Pareto -1.05 en el censo de 1991. Como fue indicado anteriormente, puede deberse este valor a transformación de un sistema de ciudades más equilibrado originado por los cambios estructurales que vienen registrándose en Brasil desde modernización de las grandes montadoras del sector automotriz,

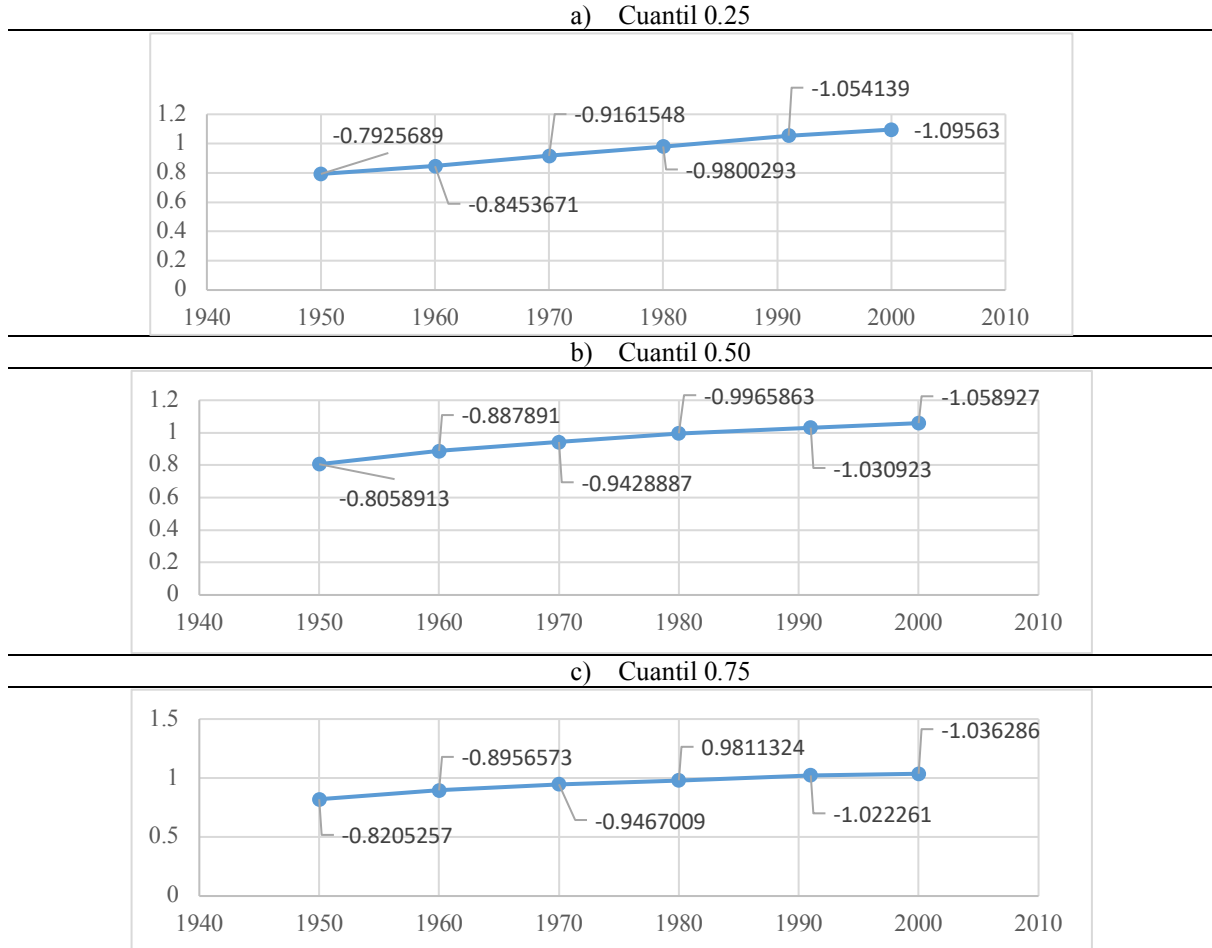
Por otra parte, en el cuartil 50% se obtiene un valor para el coeficiente de Pareto del orden del -1.03 en el censo de 1991. Lo anterior refuerza el análisis anterior, en cuanto a la posibilidad de que se encuentra dislumbrando una fase que terminaría en un estado estacionario o *steady state* para el sistema de ciudades en ese cuartil específico.

Por último, en el cuartil de 75% para los censos de 1991 se llega un valor de -1.01 y para el cuartil del 75% de -1.03. Con los valores registrados en este caso específico se puede verificar plenamente la validez de la Ley de Zipf para el cuartil del 75% de las ciudades, es decir, como ya fue mencionado anteriormente se alcanza un estado estacionario de óptimo del sistema de distribución de ciudades de Brasil.

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

Figura 2.- Estimaciones del exponente de Pareto (λ) de las ciudades brasileñas en el período 1950-2001 para los cuantílica 25%, 50% y 75%



Fuente: Construcción propia a partir de los datos de CELADE (2009)

En la Tabla 1 se muestran los resultados para los censos de 1950 hasta 2001 de las diferentes regresiones simultáneas. Los resultados más significativos son los registrados en los censos de 1991. Para el cuantil de 25% se obtuvo un valor de coeficiente de Pareto de -1.05, para el caso del 50% fue de -1.03% y para el 75% el valor es -1.02. Como ya fue verificado anteriormente, existe un gran cambio estructural que se viene dando desde principios de los años noventa en las ciudades brasileñas y este resultado de la ley de potencia refuerza aún más esa posibilidad.

Por su parte en el Censo del año 2000 el valor alcanzado para el cuantil de 25% es -1.09, para el cuantil de 50% es un valor de -1.05 y finalmente para el cuantil del 75% es valor del parámetro de Pareto es de -1.03. En este censo aparentemente ya se alcanzó el llamado *steady state*, por lo que es muy importante para sustentar el análisis visualizar graficamente las formas de las funciones de densidad Kernel que serán presentadas en la siguiente sección si existe la evidencia empírica suficiente.

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

Tabla 1.- Coeficiente de Pareto (λ) Regresiones Cuantílicas Simultáneas en el período 1950-2001

CENSO	CUANTIL 25	CUANTIL 50	CUANTIL 75
1950	-0.7925869	-0.8058913	-0.8205257
1960	-0.8453671	-0.887891	-0.8956573
1970	-0.9161548	-0.9428887	-0.9467009
1980	-0.9800293	-0.9965863	-0.9811324
1991	-1.054139***	-1.030923***	-1.022261***
2001	-1.09563***	-1.058927***	-1.036286***

Fuente: Construcción propia a partir de los datos de CELADE (2009)

Por último, en la Tabla 2 donde se realizan regresiones inter-cuantílicas todos los resultados no corroboran la validez de la Ley de Zipf. Los coeficientes son bastantes alejados al valor -1.

Tabla 2.- Coeficiente de Pareto (λ) Regresiones intercuantílicas en el período 1950-2001

CENSO	INTER-CUANTIL 25-50	INTER-CUANTIL 50-75	INTER-CUANTIL 25-75
1950	-0.0133044	-0.0279388	-0.0146344
1960	-0.0425239	-0.0502902	-0.0077663
1970	-0.026734	-0.0305462	-0.0038122
1980	-0.016557	-0.0011032	0.0154538
1991	0.0232158	0.0318785	0.0086627
2001	0.0367025	0.0593438	0.0226414

Fuente: Construcción propia a partir de los datos de CELADE (2009)

4.1 Función de densidad de *Kernel*

Una de las ventajas de la aplicación de la función de densidad de Kernel es que se logra apreciar de forma más suave y continua la distribución de la población en el rango en que se mueve el crecimiento urbano de las ciudades brasileñas.

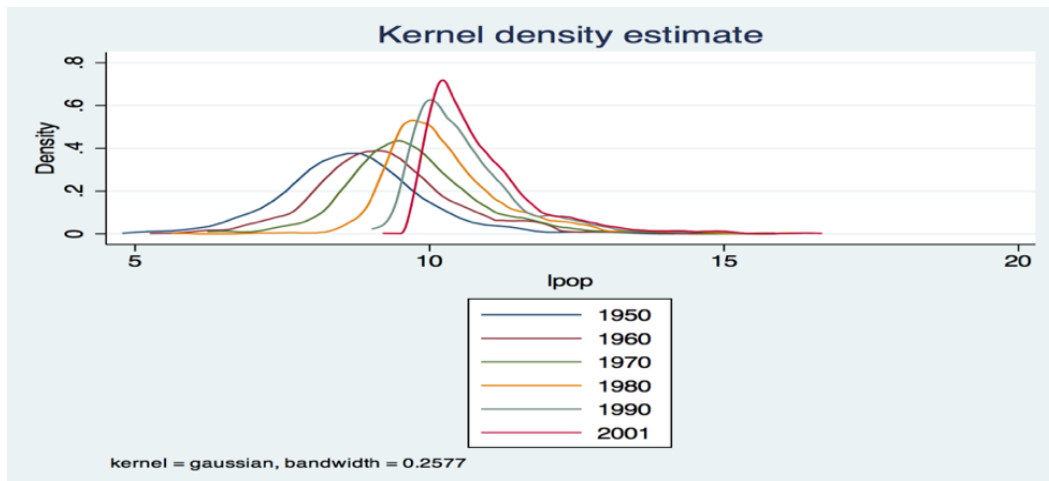
El procedimiento de la estimación de densidad de Kernel consiste en ajustar una distribución normal la cual es construida en base a valores muestrales urbanos y en que cada punto observado de datos, posteriormente se unen (realiza una suma ponderada) en cada una de estas distribuciones normales lo que permite interpretar cambios de tendencia en el tiempo. De acuerdo a los resultados presentados en la Figura 3 para el caso de Brasil en los censos entre el año 1950 y 2001 se evidencia claramente un cambio drástico. La función de densidad en el censo 1950 apunta una distribución más achatada y dispersada.

Posteriormente con el pasar tiempo de las décadas subsquentes en los censos de 1970 y 1980 hay una clara y definida tendencia a volverse más picuda, hecho muy relacionado con la tendencia de las ciudades a la primacía urbana como lo son la gran área metropolitana de las mayores capitales de los estados de São Paulo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul. Es importantes resaltar que para el caso de Brasil el valor mínimo del tamaño de las ciudades creció de 156 en 1950 a 10,011 habitantes en el año 2001, es decir, un aumentó un 6,217.3 %. Tal situación reforza aún más la importancia del estudio de las leyes de potencia.

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

Figura 3-Función de Densidad de Kernel para Brasil entre los censos 1950-2001



Fuente: Adaptado a partir de los datos de CELADE/CEPAL (2013)

Otro elemento importante que debe ser señalado para es el cambio de las distribuciones de densidades empíricas poblacionales entre 1950-2001 de la Figura 3, en donde se puede apreciar claramente que la distribución viene sufriendo un desplazamiento hacia la derecha.

Vale la pena destacar que en el año de 1950 la distribución población estaba ostensiblemente más achatada y dispersada, revirtiendo en ese censo la tendencia precedente, de hecho el valor mínimo del tamaño de una población era bastante bajo. Esta situación se revierte de nuevo y la siguiente función de densidad se muestra mucho más picuda, puntiaguda y empinada en el año 2001 y menos expandida.

Las evidencias empíricas anteriores apoyan la idea de que la tendencia en que Brasil muestra evidencias de estar experimentando una transición hacia un sistema de Primacía de ciudades, lo anterior se refleja en el hecho que la región sudeste que representa casi el 54.02% del PIB total del país. (IBGE, 2015). Lo anterior explica una distribución relativamente menos equitativa del Sistema de ciudades en de Brasil con el crecimiento de otras ciudades a raíz del comercio intraindustrial, el llamado “transporte rodoviário” y la carencia de inversión en la llamada malla ferroviaria o trenes en el Brasil en los últimos 40 años.

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

5. Conclusões Finais

Como fue verificado para la mayoría de censos urbanos en Brasil no se comprueba de forma robusta la validez de la ley de Zipf ya que apenas a partir de los censos de 1991 y 2000 comienza a obtener en los cuantiles de 25%, 50% y 75% del coeficiente de Pareto iguales a -1.

Por los resultados anteriores, se hace necesario para entender el desarrollo regional y urbano en el Brasil cuantificar el crecimiento del comercio intra-regional y la infraestructura de carreteras focalizada en la región sudeste, sur y centro y asociarlo con la infraestructura y los modales de transporte disponibles en dichas regiones, ya que la mismas han sido decisivas para la evolución del tamaño de las ciudades y se prevé que en el futuro tal cambio sea aún más profundo y radical si en un momento dado finalmente se retoma la construcción de la llamada “malha ferroviária” para el transporte de trenes considerando el tamaño continental de Brasil.

Como lo apunta este trabajo, existe una tendencia en hacia la igualdad urbana considerando los resultados de los coeficientes de Pareto para los cuantiles 25%, 50% y 75% donde obtuvieron valores que constatan la validez empírica de la Ley de Zipf, es decir, existe la tendencia inexorable de que Brasil se dirija hacia un sistema más equilibrado de ciudades por la persistencia de la primazia de algunas de sus mayores centros urbanos.

6. Referencias Bibliográficas

Amarante, de A. Ensaio de Economia Regional y Urbana. Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS) Tese de Doutorado em Economia PPGE/UFRGS, Porto Alegre 2011. Disponible: (<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/35454?locale-attribute=en&show=full>).

_____. Dinâmica da População, Steady State e os tamanhos dos municípios brasileiros, 2009. Florianópolis.

Auerbach, F. (1913). Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration. Petermann's Geographische Mitteilungen. [SI]. n. 59, p. 74-76.

Cameron, A. C.; Trivedi, P. Microeconometrics, Cambridge University Press, 2005, p.87-90.

Cameron, A. C.; Trivedi, P. Microeconometrics Using STATA, Revisited Edition, Stata Press, 2009, p. 211-225.

Centro Latinoamericano y Caribeño de Demografía (CELADE) - División de Población de la Comisión Económica para América Latina (CEPAL) (2013) Urbanización y Perspectivas. América Latina. Observatorio Demográfico, Santiago de Chile. n. 8, p. 49-61; 63-251, 2009.

Comisión Económica para América Latina (CEPAL). (2010) Definición de Población Urbana y Rural utilizadas en los Censos de los países latinoamericanos, Santiago.

Gabaix, X. (1999) Zipf's law for cities: an explanation. The Quarterly Journal of Economics, Boston, v. 114, n. 3, p. 739-743; 760-762.

ENABER XIX

3. Localização e concentração das atividades econômicas

Fujita, M.; Krugman, P.; Venables, A. (2002) *Economia Espacial. Urbanização, Prosperidade Econômica e Desenvolvimento Humano no Mundo*. São Paulo: Editorial Futura, p. 15-27; 34-38; 242-248.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) (2015): *Contas Regionais 2015: queda no PIB atinge todas as unidades da federação por primeira vez na serie*: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/17999-contas-regionais-2015-queda-no-pib-atinge-todas-as-unidades-da-federacao-pela-primeira-vez-na-serie.html>

Lanasta L., Perdiguero, M. Sanz, P.(2000) *La distribución del tamaño de las ciudades. El caso de España (1900-1999)*. *Revista Economía Aplicada*. Universidad de Zaragoza-España, Zaragoza, v. 12, n. 34, p. 5.

Pérez, V. *Población y la Ley de Zipf en Colombia y la Costa Caribe 1912-1993*. *Documentos de Trabajo sobre Economía Regional*. Banco de la República. Cartagena de las Indias. n. 71, p. 2-30, abr. 2006.

Roca, J; Arellano, B.E. *La distribución del tamaño de las ciudades, la ley de Zipf revisitada, Arquitectura, Ciudad y Entorno*, *Journal of the Centre of Land Policy- Polytechnic of Catalonia and The Thematic Network Architecture City and Environment*, Barcelona. v. 6, n. 16, p. 199-222.

Rosen, K. T.; Resnick, M. (1980). *The size distribution of cities: An examination of the Pareto law and primacy*. *Journal of Urban Economics*. [SI]. v. 8, n. 2, p. 165-186.

Segado, F.; García, A.; Rosique, M. (1996) *Ordenación del Territorio*. Editum, Universidad de Murcia, Murcia. Cap 5. *Sistema de ciudades y modelos explicativos*, p. 49-69.

Silverman B.W. (2002) *Density Estimation for statistics and data analysis*. School of Mathematics. University of Bath, Bath. p. 1-22.

Soo, K.T. (2004) *Zipf Law for Cities: A Cross Country Investigation*. *CEP Discussion Paper - Center of Economic Development (CED)*, London. n. 641, p. 1-37.

_____. *Equilibrium Locations of Vertically Linked Industries*. *International Economic Review*, [SI]. v.37, n.2, p. 341-359, mayo 1996.

Vining, D. R. (1976) *Autocorrelated growth rates and the Pareto law: a further analysis*, *Journal of Political Economy*, 84, pp. 369–380.

Ziegelmann, F. A. (2002) *Estimation of volatility functions: nonparametric and semi-parametric methods*. Thesis of Ph.D., University of Kent, Canterbury.

Zipf, G. K.(1949) *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Addison-Wesley, Cambridge, p. 19-50